التوقع الرياضي(Mathematical Expectation)

يعتبر التوقع الرياضي من المقاييس المهمة الذي يستخدم في وصف بعض المقاييس المتعلقة بالتوزيعات وخاصةً مقاييس النزعة المركزية ومنها مثلا المتوسط وبعض ومقاييس التشتت ومنها التباين ، حيث أن التوقع للمتغير العشوائي هو عبارة عن أخذ جميع النتائج الممكنة لذلك المتغير والوزن المقابل لها والمتمثل باحتمال وقوع كل من هذه النتائج.

ففي حالة المتغيرات المنفصلة ، فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ودالة الكتلة الاحتمالية له P(X) كالآتي :

$$E(X) = \sum XP(X) \quad , \quad x \text{ لجميع قيم}$$

وتمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X متوسط المجتمع $E(X) = \mu$

أما إذا كان المتغير العشوائي متصل ودالة الكثافة الاحتمالية لهُ $f(x)$ ، فإن القيمة المتوقعة كالآتي :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f(x) dx$$

ومن خواص التوقع الرياضي كالآتي :

1) إذا كانت لديك c كمية ثابتة فأن $E(c) = c$

2) توقع مجموع متغيرين عشوائيين = مجموع توقع المتغيرين :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

3) إذا كانت لديك $X_1 \leq X_2$ فأن $E(X_1) \leq E(X_2)$

4) إذا كانت لديك المتغيرين العشوائيين X_1, X_2 مستقلان فإن :

$$E(X_1 * X_2) = E(X_1) * E(X_2)$$

التوقع الرياضي Mathematical Expectation

10 تعريف التوقع

يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية متقطعة كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

و يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية مستمرة كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_x.

مثال: نلقي قطعة نقدية 4 مرات. أحسب العدد المتوقع من المرات التي نحصل فيها على وجه.

عدد مرات وجه **X**	0	1	2	3	4	المجموع
P(X)	$(1/2)^4$	$4\ (1/2)^4$	$6\ (1/2)^4$	$4\ (1/2)^4$	$(1/2)^4$	16/16 = 1
XP(X)	0	$4\ (1/2)^4$	$12\ (1/2)^4$	$12\ (1/2)^4$	$4\ (1/2)^4$	32/16 = 2

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 32/16 = 2$$

العدد المتوقع هو مرتين من بين 4 رميات.

مثال2: في لعبة رمي لحجر النرد مرة واحدة يربح اللاعب 20 درجة اذا حصل على الرقم 2 ويربح 40 درجة اذا حصل على الرقم 4 و 60 اذا حصل على الرقم 6 ويخسر 10 درجات بحصوله على الرقم 1 و 30 درجة اذا حصل على الرقم3 و 50 على الرقم 5. تحقق مما اذا كانت اللعبة متوازنة (هل الربح يساوي توقع الخسارة؟)

الجواب هو أن اللعبة غير متوازنة لأن توقع الربح أكبر من توقع الخسارة $E(x) = 30/6 = 5 > 0$

نتيجة الرمي	1	2	3	4	5	6	المجموع
نتيجة المراهنة X	-10	20	-30	40	-50	60	-
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6
X*P(X=x)	-10/6	20/6	-30/6	40/6	-50/6	60/6	(120-90)/6>0

مثال3. أوجد التوقع الرياضي للمتغيرة ذات دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \int_{-\infty}^{0} x.0.dx + \int_{0}^{2} x.\frac{1}{2}x.dx + \int_{2}^{+\infty} x.0.dx = \frac{4}{3}$$

11 توقع دالة

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل.

لتكن X م ع لها دالة كثافة f(x)، و g(x) = Y م ع تابعة لها.

$$E(Y) = E(g(x)) = \sum_x g(x)f(x)$$

في حالة X م متصلة:

$$\boldsymbol{E(Y) = E\big(g(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f(x).dx}$$

مثال1. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، و$Y=X^2$. أحسب E(X) و E(Y) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1

X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) =1
X^2	0	1	4	
X^2*P(X)	0	1/2	1	$E(X^2) = 3/2$

مثال2: لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية، و $Y = g(X) = 3X^2 - 2X$. أحسب E(Y).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(0) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(x/2) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(0) dx$$

$$E(Y) = 0 + \int_0^2 (3x^2 - 2x)(x/2) dx + 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[12 - \frac{16}{3}\right] = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

التباين والانحراف المعياري Variance & Stand. Devaition

وجدنا أن التوقع الرياضي يحدد لنا تمركز التوزيع حول نقطة مركزية لكنه لا يخبرنا عن اختلاف أو انتشار هذه القيم، إذاً لا بد لنا من مقياس يقيس تشتت أو تبعثر نقاط التوزيع عن النقطة المركزية، هنا نعرف التباين للمتحول العشوائي X (منفصلاً ومتصلاً).

يعرف التباين لمتغيرة عشوائية كما يلي:

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

و الانحراف المعياري هو جذر التباين.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}.$$

في حالة المتغيرة العشوائية المتقطعة :

$$V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

في حالة المتغيرة العشوائية مستمرة :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

مثال. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
$(X-\mu)^2$	1	0	1	
$(X-\mu)^2$ * P(X)	1/4	0	1/4	V(X) = 1/2

مثال 2. لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية؛ أحسب تباين X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$\mu\ of\ this\ example\ is \frac{4}{3}\ baseb\ on\ example\ 3$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 . f(x) . dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{0} (x-4/3)^2 . 0 . dx + \int_{0}^{2} (x-4/3)^2 . \frac{x}{2} . dx + \int_{2}^{+\infty} (x-4/3)^2 . 0 . dx = 0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\left(x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{16}{9}\right) + 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{16}{9\times 2}x^2\right)_0^2 = \frac{4}{9}$$

14 خصائص التباين

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$V(CX) = C^2V(X)$, $V(C) = 0$

في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

مثال: نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) باستخدام الصيغة

$$\mathbf{V(X) = E(X^2) - E(X)^2.}$$

لتكن المتغيرة $Y = 2X$. أحسب V(Y) ، نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المحصل عليها. أحسب تباين المتغيرة W حيث: $W = Z - Y$

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
$(X)^2$	0	1	4	
$(X)^2$ * P(X)	0	1/2	1	$E(X)^2 = 3/2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (3/2) - 1 = 1/2$
$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4\ (1/2) = 2.$
$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) + V(2X) = V(Z) + 2^2V(X).$
$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = (1/6)[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2] - (1/6)[1+2+3+4+5+6] = 70/6$
$V(W) = (70/6) + 4\ (1/2) = 82/6 = 13.67$

لحساب التوقع الرياضي لدالة ما في X (مثلا التباين، أو X^2) نضرب قيم الدالة في الاحتمالات المقابلة لـX:

$$E(Y) = E(g(x)) = \sum_x g(x)f(x)$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (فص9)

1. التوزيع الثنائي Distribution binomiale

أ- استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي:

إذا كررنا تجربة برنولي ثنائية النتيجة n مرة فإن X (عدد النجاحات) تأخذ القيم: $X = 0, 1, \ldots n$

لنفترض التجربة البرنولية رمي قطعة نقدية مكررة عدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (H):

حالة : $n = 2$ $\quad X = 0, 1, 2.$

$P(X = 0) = q*q = q^2$, $\quad P(X=1) = P(HT) + P(TH) = p*q + q*p = 2p^1q^1$

حالة : $n = 3$ $\quad X = 0, 1, 2, 3.$

$P(X=3) = P(HHH) = p*p*p = p^3$, $P(X=2) = P(HHT \text{ or } THH \text{ or } HTH) = 3p^2q^1$

حالة : $n = 4$ $\quad X = 0, 1, 2, 3, 4.$

$P(X=3) = P(HHHT \text{ or } THHH \text{ or } HTHH \text{ or } HHTH) = 4\ p^3q^1$

في النتيجة الأخيرة نلاحظ العدد 3 هو x ، العدد 1 هو n-x ، والعدد 4 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على ثلاث نجاحات من بين (n=4) تجارب، ويمكن حسابه كما يلي:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كما يلي:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} \quad ; x = 0,1,2, \ldots, n \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots \ldots$$

حيث x عدد مرات النجاح، p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، q = 1-p احتمال الفشل وn عدد التجارب. و هو تعريف " قانون التوزيع الثنائي" ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي أيضا كما يلي:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

أو $X \sim B(n, p)$.

ب- شروط استخدام التوزيع الثنائي

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات
- احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة)

مثال : أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات احتمال الحصول على:
ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات.

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{(n-x)} \Rightarrow P(X=0)=\binom{4}{0}0.5^0 0.5^{(4)}=1/16$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\ 0.5^1\ 0.5^3 \qquad P(X=2)=\binom{4}{2}\ 0.5^2\ 0.5^2$$

مثال 2: نسحب بالإرجاع 3 كريات من صندوق يحتوي 5 كريات منها 3 حمراء.
أحسب احتمال الحصول على كريتين حمراء.

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\ (3/5)^2\ (2/5)^1$$

مثال: اشترك 7 طلاب في امتحان مادة الرياضيات، فاذا كان احتمال النجاح في هذه المادة 0.6 فاحسب:
اولا: احتمال ان ينجح 4 طلاب .
ثانياً: احتمال ان ينجح كل الطلاب.

الحل:
اولا: احتمال نجاح طل الطلاب

$$f(n;x;p) = C_x^n p^x q^{n-1} = C_4^7 (0.6)^4 (1-0.6)^{7-4}$$

$$= \frac{7!}{4!\,(7-4)!}(0.6)^4 (0.4)^3 = 0.2903$$

ثانياً: احتمال نجاح كل الطلاب.

$$f(n;x;p) = C_x^n p^x q^{n-1} = C_7^7 (0.6)^7 (1-0.6)^{7-7}$$

$$= \frac{7!}{7!\,(7-7)!}(0.6)^7 (0.4)^0 = 0.028$$

مثال: اذا كانت نسبة التالف من منتج في مصنع معين هي 0.1 من الانتاج الكلي. فاذا سحبنا عشوائياً من هذا الانتاج 6 وحدات فما هو احتمال ان يكون عدد الوحدات التالفة اقل من 3 وحدات.
ثانياً: احتمال ان ينجح كل الطلاب.

الحل:
اقل من ثلاث وحدات ممكن ان تكون 0 او 1 او 2 لذلك

$$P(X < 3) = p(x = 0) + P(x = 1) + p(x = 2)$$

$$f(n; x; p) = C_x^n p^x q^{n-1} = C_0^6 (0.1)^0 (1 - 0.1)^{6-0} = 0.531$$

ثانياً: احتمال نجاح كل الطلاب.

$$f(n; x; p) = C_x^n p^x q^{n-1} = C_1^6 (0.1)^1 (1 - 0.1)^{6-1} = 0.354$$

$$f(n; x; p) = C_x^n p^x q^{n-1} = C_2^6 (0.1)^2 (1 - 0.1)^{6-2} = 0.0984$$

$$P(X < 3) = 0.531 + 0.354 + 0.0984 = 0.984$$

مثال: ماهو احتمال ظهور العدد 3 مرتين او اكثر في تجربة رمي حجر النرد اربعة مرات؟ .

الحل:

ان عدد مرات ظهور العدد 3 في التجربة هو X=0,1,2,3,4

لكن ظهور العدد 3 مرتين او اكثر يعني ان X=2,3,4

$$P(X=2)=C_x^n p^x q^{n-1}=C_2^4(\frac{1}{6})^2(1-\frac{1}{6})^{4-2}=0.1157$$

$$P(X=3)=C_3^4(\frac{1}{6})^3(1-\frac{1}{6})^{4-3}=0.0154$$

$$P(X=4)=C_4^4(\frac{1}{6})^4(1-\frac{1}{6})^{4-4}=0.0008$$

$$P(X\geq 2)=0.1157+0.0154+0.0008=0.132$$

ت- خصائص التوزيع الثنائي

التوقع (الوسط الحسابي) والتباين: يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية (ثنائية) = $X = X_1 + \dots X_i + \dots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي نفس التوقع $(E(X_i) = p)$ أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\ p(x)$$

او

الوسط الحسابي $\mu = E(X) = \Sigma E(X_i) = \Sigma p_i = n\ p \Rightarrow \mu = E(X) = np$

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n),$$

X_i مستقلة إذن فالتباين

$$V(X) = \Sigma V(X_i) = \Sigma pq \Rightarrow V(X) = npq$$

او

$$\boldsymbol{\sigma^2 = np(1-p)}$$

مثال: أحسب التوقع والتباين لتجربة رمي قطعة النقود 4 مرات

x	0	1	2	3	4
f(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

الحل:

$$\mu=E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, p(x)$$

$$=0(1/16) + 1(4/16) +2(6/16) + 3(4/16) + 4(1/16) = 2$$

او

$$\mu=E(X)= np$$

$$= 4\ (1/2) = 2$$

والتباين

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2\, p(x) - \mu^2$$

$$= [0^2(1/16) + 1^2(4/16) + 2^2(6/16) + 3^2(4/16) + 4^2(1/16)] - 2^2 = \frac{80-64}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

او

$$V(X) = npq = 4(1/2)(1/2) = 1$$

مثال: صندوق به خمس نماذج مصنعة من مصنع فاذا كان احتمال ان تكون اي منها عاطلة هو 0.4 اوجد :

A. حدد نوع التوزيع الاحتمالي، واوجد التوزيع الاحتمالي للنماذج
B. اوجد دالة التوزيع التراكمية
C. اوجد متوسط وتباين النماذج العاطلة.
D. احتمال سحب نموذجين عاطلين منها.
E. احتمال سحب نموذجين عاطلين على الاكثر
F. احتمال سحب نموذجين عاطلين على الاقل.
G. متوسط وتباين النماذج الشغالة.

الحل:

A- التوزيع المستخدم في المثال توزيع ثنائي او توزيع ذا الحدين حيث n=5, p=0.4 , q=0.6

B- التوزيع الاحتمالي لعدد النماذج العاطلة

$$P(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} (0.4)^x (0.6)^{5-x} & ; x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

C- لحساب المتوسط والتباين للنماذج العاطلة

$$E(x) = np = 5 * 0.4 = 2$$
$$V(x) = npq = 5 * 0.4 * 0.6 = 1.2$$

D- احتمال سحب نموذجين عاطلين

$$P(2) = \binom{5}{2} 0.4^2 (0.6)^{5-2} = 0.3456$$

E. احتمال سحب نموذجين عاطلين على الاكثر
F. احتمال سحب نموذجين عاطلين على الاقل.
G. متوسط وتباين النماذج الشغالة.

E-سحب نموذجين عاطلين على الاكثر يعني اما 0 او 1 او 2. اي ان $x \leq 2$ لذا

$$P(x \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \binom{5}{0} 0.4^0 (0.6)^{5-0} + \binom{5}{1} 0.4^1 (0.6)^{5-1} + \binom{5}{2} 0.4^2 (0.6)^{5-2} = ?$$

F- نموذجين عاطلين على الاقل يعني ان $x \geq 2$

$$P(x \leq 2) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$
$$= \binom{5}{2} 0.4^2 (0.6)^{5-2} + \binom{5}{3} 0.4^3 (0.6)^{5-3} + \binom{5}{4} 0.4^4 (0.6)^{5-4} + \binom{5}{5} 0.4^5 (0.6)^{5-5} = ?$$

G- احتمال سحب نموذجين عاطلين

$$\boldsymbol{E(x) = np = 5 * 0.6 = 3}$$
$$\boldsymbol{V(x) = npq = 5 * 0.4 * 0.6 = 1.2}$$